CAPÍTULO 4 Estática

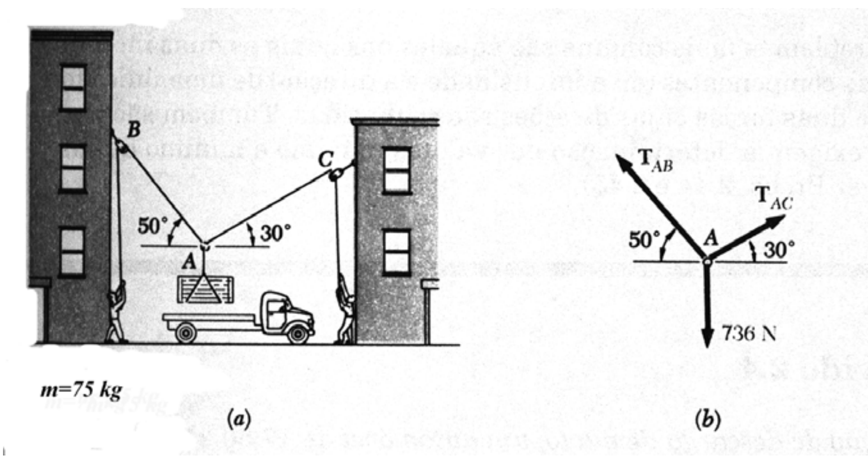
As Três Leis ou Princípios Fundamentais da Mecânica Newtoniana discutidos no capítulo anterior sustentam todo o estudo da Estática dos pontos materiais, corpos rígidos e conjuntos de corpos rígidos.

O estudo da estática do corpo rígido baseia-se no estudo da estática do ponto material, por onde terá início o nosso estudo. Veremos como os resultados obtidos para o ponto material podem ser utilizados directamente em grande número dos problemas referentes a condições de repouso de corpos reais.

Neste capítulo de estática iremos estudar essencialmente o equilíbrio de corpos rígidos e as condições de equilíbrio de sistemas de forças nele aplicados.

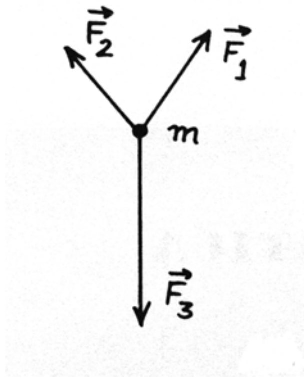
4.1. Equilíbrio estático de um ponto material

Diz-se que um sistema de forças aplicado a um corpo está em equilíbrio se da sua aplicação não resultar nenhuma alteração no estado de movimento do corpo. Um caso particular de equilíbrio mecânico, o **equilíbrio estático**, será o **estado de repouso** num determinado referencial de inércia, definido pela **velocidade nula** de todos os pontos do corpo.



Vamos estudar a estática em referenciais de inércia. Trataremos em primeiro lugar de sistemas de forças aplicados a pontos materiais, i.e., corpos de dimensões desprezáveis, para os quais não se considera o movimento de rotação.

A condição necessária e suficiente de equilíbrio dum sistema de forças aplicado a um ponto material é que a resultante desse sistema seja nula. Na realidade, por definição de equilíbrio, a aceleração é nula, o que implica, pela lei fundamental da dinâmica, que a força também seja nula – condição necessária.



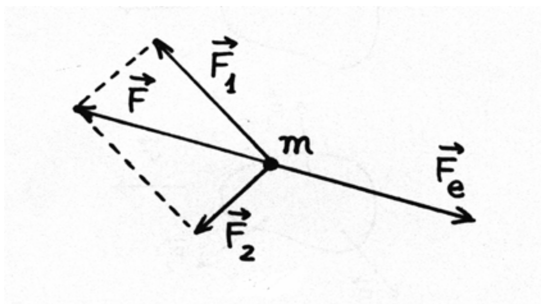
Por outro lado, $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ implica, pela mesma lei de Newton, que a aceleração seja nula, o que é equivalente à velocidade ser constante. Logo, $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ garante-nos o equilíbrio – condição suficiente.

Sistemas equivalentes

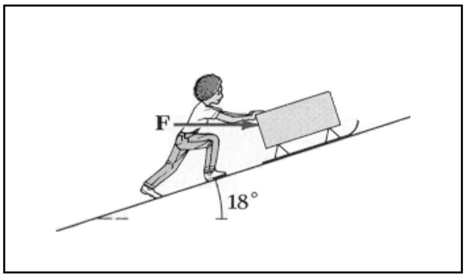
A um mesmo ponto material podemos aplicar diferentes sistemas de forças. Se estes sistemas tiverem o mesmo efeito sobre o estado de movimento do ponto material, eles dizem-se sistemas equivalentes.

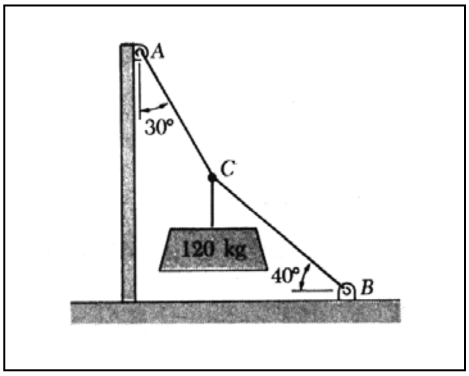
Em particular, um sistema de forças aplicado a um ponto material é sempre equivalente à resultante desse sistema aplicado ao mesmo ponto material, pela lei fundamental da dinâmica. Este sistema pode ser sempre equilibrado por uma força $\vec{F}_e$, denominada **equilibrante do sistema**, e que é simétrica da resultante:

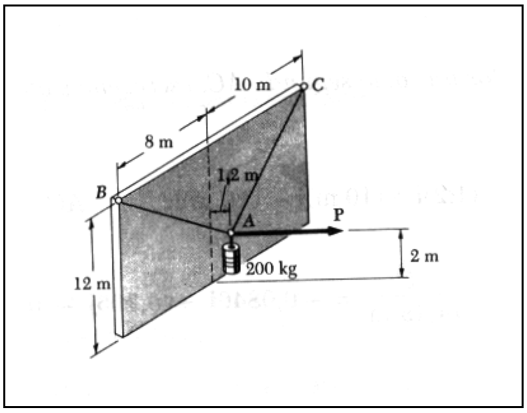
$$\vec{F}_\mathrm{e} = -\vec{R}\,.$$



Exemplos:







Caso bidimensional:
2 incógnitas, 2 equações

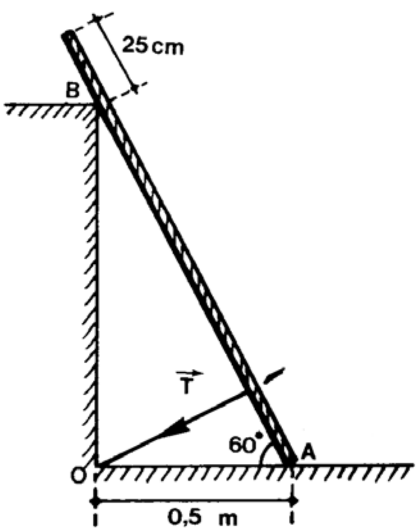
$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$R_x = \sum F_x = 0$$
$$R_y = \sum F_y = 0$$

Caso tridimensional:
3 incógnitas, 3 equações

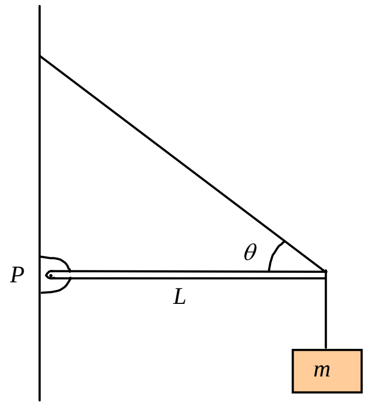
$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$R_x = \sum F_x = 0$$
$$R_y = \sum F_y = 0$$
$$R_z = \sum F_z = 0$$



Caso bidimensional, por exemplo:
3 incógnitas, apenas 2 equações ?

Torna-se necessária uma 3ª equação !

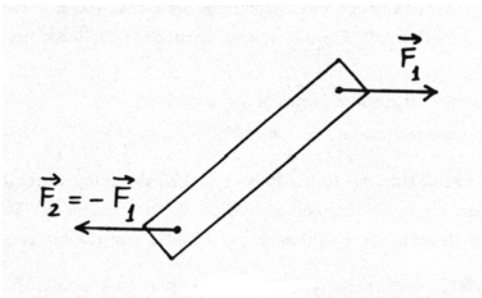


4.2. Momento de uma força em relação a um ponto

Começaremos por estudar sólidos livres (não sujeitos a ligações), para depois nos referirmos ao caso dos sólidos que têm um ponto ou um eixo fixos (sujeitos a ligações).

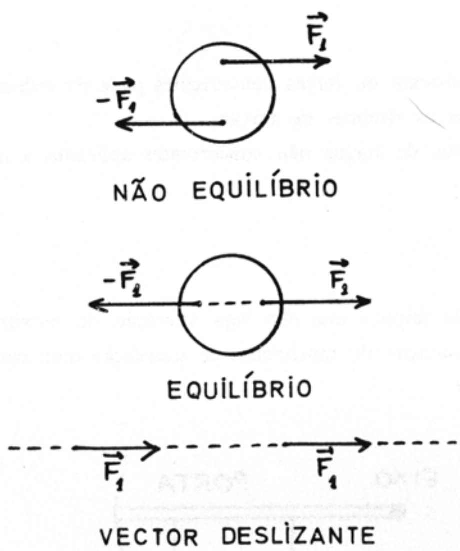
Ao contrário do que se passa com um ponto material, a resultante nula de um sistema de forças aplicadas a um corpo rígido não garante que o corpo esteja em equilíbrio. Contudo, se o corpo estiver em equilíbrio, tem aceleração nula, o que implica que a resultante do sistema de forças também seja nula. Logo, $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ é uma condição necessária, mas não é a condição suficiente de equilíbrio dum sistema de forças aplicado a um corpo rígido. Esta condição garante-nos o equilíbrio quanto ao movimento de translação, mas não garante o equilíbrio quanto ao movimento de rotação, pois o corpo pode rodar.

Consideremos o sistema de forças constituído por duas forças simétricas, com linhas de acção distintas (**binário**), aplicado em dois pontos distintos de um qualquer corpo rígido. As forças são anti-paralelas (mesma direcção mas sentidos opostos) e as suas intensidades são iguais; são forças simétricas. O sistema das duas forças tem resultante nula. O corpo não adquire movimento de translação.



$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$, mas a barra não está em equilíbrio: RODA!

A capacidade de uma força de produzir rotação é medida por uma grandeza denominada **momento da força** (ou torque).

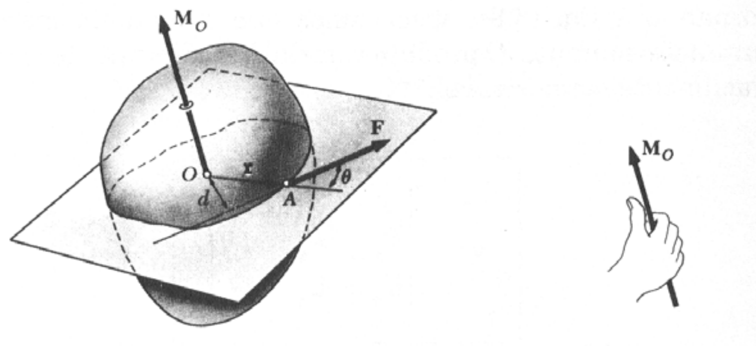


Contudo, o corpo começa a rodar, excepto quando as forças se encontram sobre a mesma recta (posição de equilíbrio). Ou seja, o corpo só fica em equilíbrio quando as rectas suporte dos vectores força coincidem, sendo o equilíbrio independente do ponto de aplicação das forças, i.e., se na posição de equilíbrio mudarmos o ponto de aplicação de uma das forças sobre a recta suporte comum, verifica-se que o equilíbrio se mantém (vectores deslizantes).

Momento de uma força (momento polar)

Como saber então se dois sistemas de forças não concorrentes aplicados a um sólido são ou não equivalentes? Ou se estão em equilíbrio? A resultante nula implica que não haja alteração do movimento de translação de um corpo. E o movimento de rotação?

Consideremos, agora, uma força $\vec{F}$ que actua num corpo rígido. O efeito dessa força sobre o corpo rígido depende, para além do módulo, da direcção e do sentido da força, do seu ponto de aplicação, A. A posição de A é definida pelo vector $\vec{r}$, que une o ponto fixo O com A ($\vec{r}$ é o vector-posição de A).



(a) (b)

Define-se **momento de uma força $\vec{F}$ em relação a um ponto** O, $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$, como sendo o produto vectorial

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

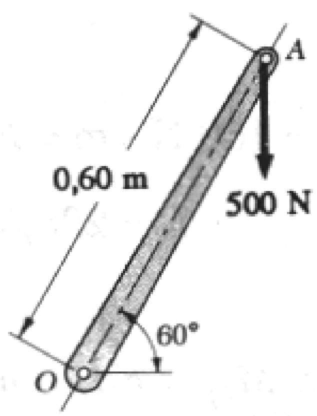
SI: o momento de uma força é expresso em N.m

As características do vector momento, $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$, são:

- Ponto de aplicação – ponto O
- Módulo - $M_{\vec{F},\mathrm{O}} = rF\sin\theta = F d_{\perp}$ (onde $d_{\perp}$ representa a distância de O à linha de acção de $\vec{F}$)
- Direcção – perpendicular ao plano definido por $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (note que $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} \perp \vec{F}$)
- Sentido – sentido directo (dado através de uma das regras do produto vectorial)

O momento de uma força em relação a um ponto é um **vector aplicado**. O momento de uma força é nulo em relação ao respectivo ponto de aplicação, ou a qualquer ponto da sua recta suporte (casos: θ= 0º ou θ= 180º). O módulo de $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$ dá-nos uma medida da tendência da força $\vec{F}$ fazer o corpo rígido rodar em torno de um eixo fixo, dirigido segundo $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$. Contudo, o momento $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$ de uma força $\vec{F}$ em relação a um ponto O <u>não depende</u> da posição do ponto de aplicação da força, A, ao longo da linha de acção da força $\vec{F}$ (ver figura anterior).

Exemplo: Uma força de 500 N actua na extremidade de uma alavanca de 60 cm, de acordo com a figura. Determine o momento da força em relação a O.



$$M_O = rF\sin\theta = F d_{\perp}$$

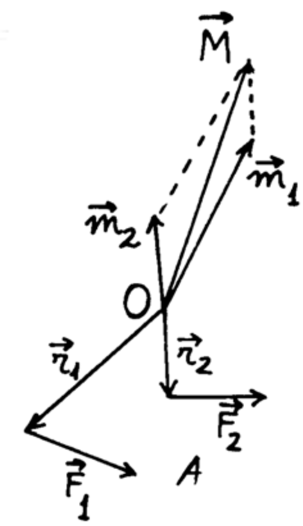
com $d_{\perp} = r\sin\theta = (0{,}60\mathrm{m})\times\sin(30^{\mathrm{o}})$

Então $M_{\mathrm{O}} = (500\mathrm{N})(0{,}30\mathrm{m}) = 150\mathrm{N.m}$, no sentido horário.

Podemos agora dizer que duas forças $\vec{F}$ e $\vec{F}'$ são <u>equivalentes</u> se, e só se, forem iguais (mesmos módulo, direcção e sentido) e tiverem momentos iguais em relação a um ponto O.

$\vec{F} = \vec{F}'$ $\qquad \vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} = \vec{M}'_{\vec{F}',\mathrm{O}}$ $\qquad$ (c.n.s.)

O momento resultante de um sistema de *n* forças $\vec{F}_i$ $(i = 1,\dots,n)$ em relação a um ponto O é definido pela soma dos momentos de cada uma das forças em relação a esse ponto O.



$$\vec{M}_{\mathrm{O}} = \sum \vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

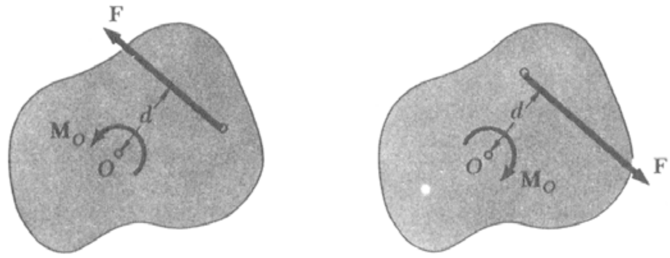
Muitas das aplicações que veremos referem-se a estruturas bidimensionais (i.e., estruturas com comprimento e largura mas com espessura desprezável), submetidas a forças contidas no plano da estrutura.

Exemplo:
lâmina sob a acção de uma força $\vec{F}$:

$$M_{\vec{F},\mathrm{O}} = \pm F d$$

$\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} \perp$ plano do papel e módulo

$$M_{\vec{F},\mathrm{O}} = F d$$



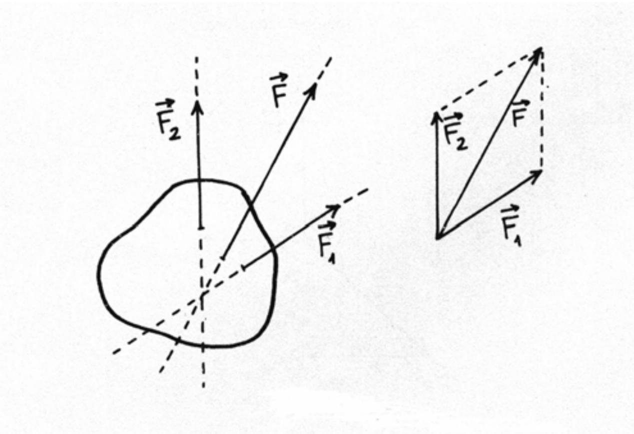
(a) $M_O = +Fd$ (b) $M_O = -Fd$

CONVENÇÃO DE SINAIS:

$M_O \perp$ para fora do papel
Acção anti-horária
$M_O \perp$ para dentro do papel
Acção horária

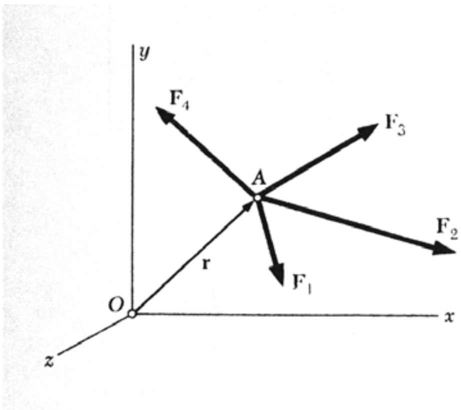
Teorema de Varignon

Se diversas **forças concorrentes** $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, estão aplicadas num mesmo ponto A e se denominarmos $\vec{r}$ o vector posição de A, a propriedade distributiva do produto vectorial permite-nos escrever



$$\vec{M}_{\vec{R},\mathrm{O}} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\right) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F} + ... = \vec{M}_{\vec{F}_1,\mathrm{O}} + \vec{M}_{\vec{F}_2,\mathrm{O}} + ... = \sum \vec{M}_{\vec{F}_i,\mathrm{O}}$$

i.e., o momento em relação a um ponto O da resultante de diversas forças concorrentes é igual à soma vectorial dos momentos das várias forças em relação ao mesmo ponto O.



Este resultado permite substituir a determinação directa do momento de uma força pela determinação dos momentos das suas componentes cartesianas.

Se, em particular, todas as forças forem co-planares e se O pertence a esse mesmo plano, todos os momentos têm a direcção perpendicular ao plano, e tem-se $M_{\vec{R},\mathrm{O}} = \sum M_{\vec{F}_i,\mathrm{O}}$

Sistemas equivalentes

A equação $\vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\right) = \vec{r} \times \vec{R}$ permite concluir que um sistema de **forças concorrentes** pode ser substituído por uma única força, a sua resultante aplicada em A, que é sempre equivalente a esse sistema de forças concorrentes para efeitos de translação e de rotação.

Note que, em geral, o momento resultante de um sistema de forças, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2, \ldots$, em relação a um ponto não coincide com o momento da resultante das forças $\vec{R}$.

Componentes Cartesianas do Momento de uma Força

Em geral, a determinação do momento de uma força no espaço será simplificada se a força e o vector-posição do seu ponto de aplicação forem decompostos nas suas componentes cartesianas x, y e z:
Substituindo

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

em

$$\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

e calculando o produto vectorial dos dois vectores, escrevemos o momento $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$ de $\vec{F}$ em relação a O na forma

$$\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k}$$

onde as componentes <u>escalares</u> <u>ou</u> <u>cartesianas</u> M_x, M_y e M_z são definidas pelas relações

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}}$$

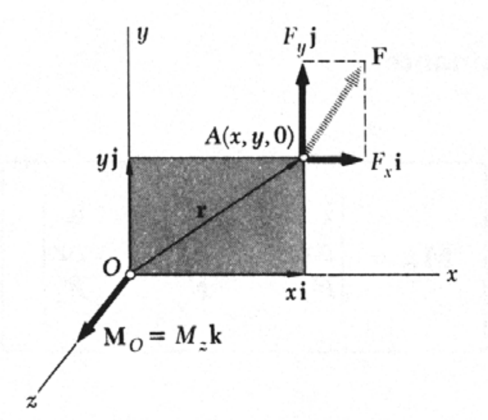
As componentes <u>escalares</u> M_x, M_y e M_z do momento $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$ medem a tendência da força $\vec{F}$ produzir no corpo rígido um movimento de rotação em torno dos eixos *Ox*, *Oy* e *Oz*, respectivamente.

Retomando o caso bidimensional, e supondo que a força se situa no plano *xy*, temos que $z = 0$ e $F_z = 0$ e portanto

$$\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} = M_z\hat{k} = \left(xF_y - yF_x\right)\hat{k}$$

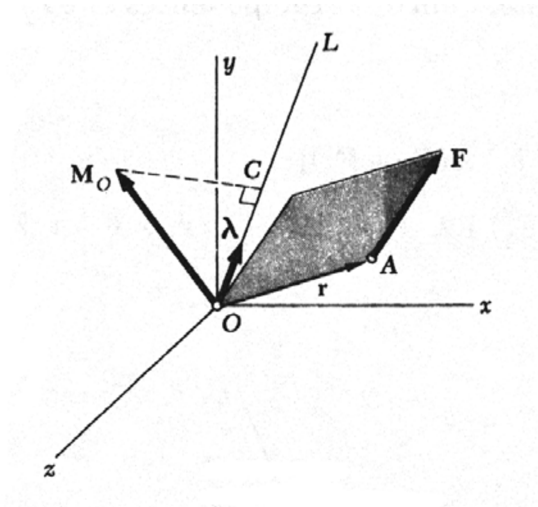
$M_z > 0$ $\quad \vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$ aponta para fora do papel

(a força tende a girar o corpo no sentido anti-horário, em torno de O)



4.3. Momento de uma força em relação a um eixo - momento axial

Consideremos de novo uma força $\vec{F}$ que actua num corpo rígido e o momento $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$, dessa força em relação a O. Seja OL um eixo orientado que passa por O.



Define-se momento $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{OL}}$ da força $\vec{F}$ em relação a um eixo OL, como sendo a projecção vectorial OC do momento $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$ sobre o eixo OL.

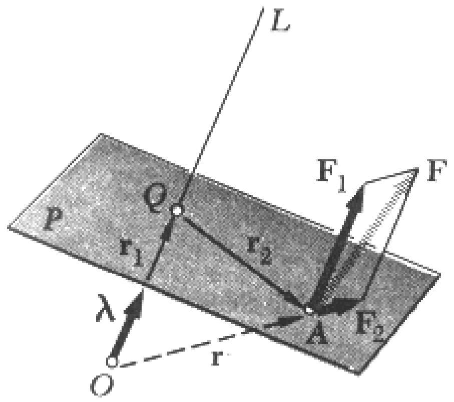
Sendo o eixo OL orientado, podemos definir um vector unitário $\hat{\lambda}$ na direcção e sentido do eixo. A projecção do momento $\vec{M}_{\vec{F},O}$ sobre o eixo OL será então dada pelo escalar resultante do produto misto

$$M_{\vec{F},\mathrm{OL}} = \hat{\lambda} \bullet \vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} = \hat{\lambda} \bullet \left(\vec{r} \times \vec{F} \right)$$

e o momento da força em relação a um eixo é dado por

$$\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{OL}} = M_{\vec{F},\mathrm{OL}} \hat{\lambda}$$

Com esta definição de momento axial pode demonstrar-se que a projecção do momento da força $\vec{F}$ sobre o eixo OL será sempre a mesma, qualquer que seja o ponto considerado sobre o eixo OL.



O significado físico do momento $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{OL}}$ de uma força $\vec{F}$ em relação a um eixo fixo OL torna-se claro se a força $\vec{F}$ for decomposta em componentes ortogonais $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, uma paralela a OL e a outra num plano P normal a OL. Decompondo analogamente $\vec{r}$, em componentes ortogonais $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, tem-se

$$M_{\vec{F},\mathrm{OL}} = \hat{\lambda}\bullet\left[\left(\vec{r}_1+\vec{r}_2\right)\times\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\right]=$$

$$=\hat{\lambda}\bullet\left(\vec{r}_1\times\vec{F}_1\right)+\hat{\lambda}\bullet\left(\vec{r}_1\times\vec{F}_2\right)+\hat{\lambda}\bullet\left(\vec{r}_2\times\vec{F}_1\right)+\hat{\lambda}\bullet\left(\vec{r}_2\times\vec{F}_2\right)$$

Verifica-se que todos os produtos mistos, excepto o último são nulos, pois envolvem vectores complanares quando traçados a partir de uma origem comum, e tem-se assim

$$M_{\vec{F},\mathrm{OL}} = \hat{\lambda}\bullet\left(\vec{r}_2\times\vec{F}_2\right)$$

onde o produto vectorial $\vec{r}_2\times\vec{F}_2$ é perpendicular ao plano *P* e representa o momento da componente $\vec{F}_2$ em relação ao ponto Q, onde o eixo intercepta o plano.

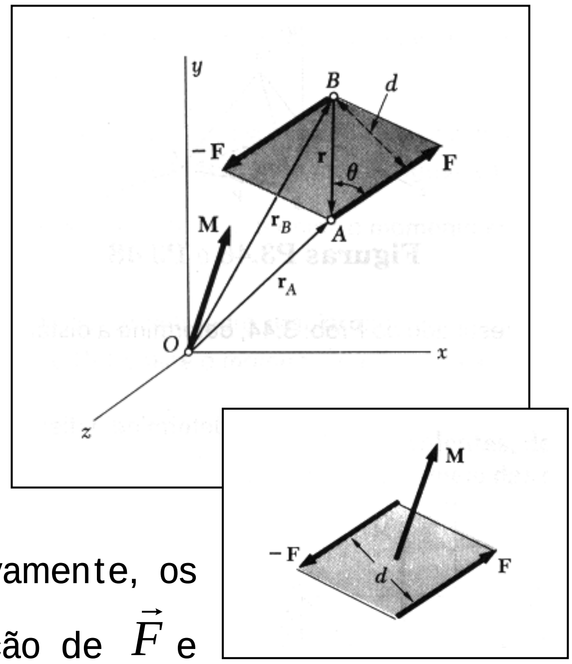
O escalar $M_{\vec{F},\mathrm{OL}}$ mede a tendência de $\vec{F}_2$ fazer girar o corpo rígido em torno do eixo fixo OL.
O escalar $M_{\vec{F},\mathrm{OL}}$ será positivo se $\vec{r}_2\times\vec{F}_2$ e OL tiverem o mesmo sentido, e negativo em caso contrário.

Desta definição de momento de uma força em relação a um eixo, conclui-se imediatamente que ***o momento de uma força em relação a um dos eixos coordenados é igual à componente do momento,*** $\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{OL}}$ ***, segundo esse eixo***!

4.4. Binários. Redução de um sistema de forças a um sistema força-binário. Sistemas equivalentes de forças. Casos particulares: forças concorrentes, forças complanares e forças paralelas

Momento de um Binário

Duas forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ que tenham o mesmo módulo, linhas de acção paralelas e sentidos opostos formam um **binário**. É claro que a soma das componentes das duas forças em qualquer direcção é zero; contudo a soma dos momentos das duas forças em relação a um dado ponto não é zero.



É evidente que $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$, pelo que **o binário não produz qualquer efeito de translação**.

Mas **o binário produz rotação**: representando por $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$, respectivamente, os vectores posição dos pontos de aplicação de $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, a soma dos momentos das duas forças em relação a O será

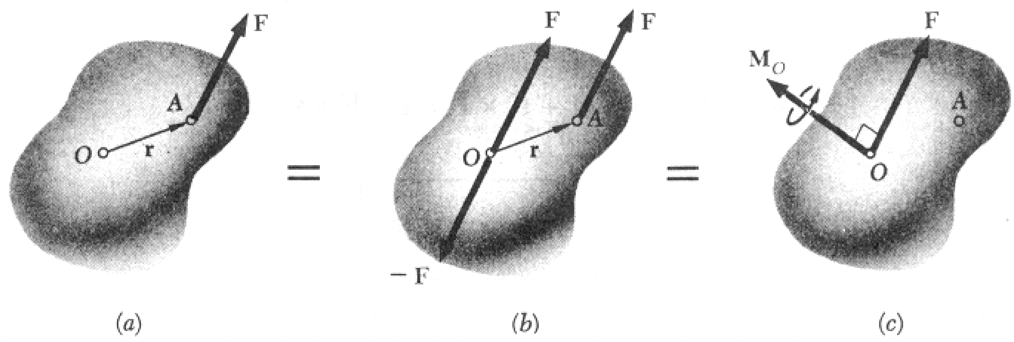
$$\vec{M} = \sum \vec{M}_{\vec{F}_i,O} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}\right) = \vec{r}_A \times \vec{F} - \vec{r}_B \times \vec{F} =$$
$$= \vec{r}_A \times \vec{F} - \vec{r}_B \times \vec{F} = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \neq \vec{0}$$

O vector $\vec{M}$, denominado **momento do binário**, é um vector perpendicular ao plano definido pelas duas forças, o seu sentido é definido pela regra da mão direita e o seu módulo é $M = rF\sin\theta = Fd$, onde d representa a distância entre as linhas de acção de $\vec{F}$ e $-\vec{F}$; d é usualmente conhecido por <u>braço do binário</u>.

Note ainda que o vector $\vec{r}$ é independente do ponto O.

Sistemas força-binário

Do exposto atrás, podemos definir o efeito de um binário sobre um corpo rígido através do vector momento do binário, $\vec{M}$.

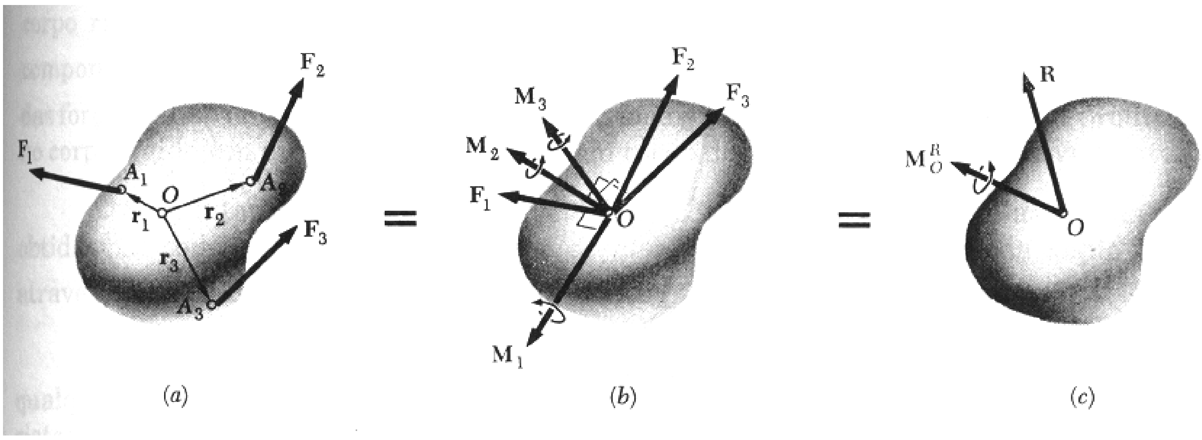


Se considerarmos agora uma força $\vec{F}$ qualquer actuando sobre um corpo rígido, num ponto A definido pelo vector posição $\vec{r}_A$. Se pretendermos que essa força actue num ponto O, arbitrário, podemos deslocá-la desde que acrescentemos ao corpo um binário de momento igual ao momento de $\vec{F}$ em relação a O. A esta combinação chama-se **sistema força-binário**.

Redução de um sistema de forças a um sistema força-binário

Em geral um sistema de forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$ que actuam sobre os pontos $A_1, A_2, \cdots$, distintos, de um corpo rígido, não pode reduzir-se apenas à resultante das forças aplicadas sobre o corpo: é necessário considerar os dois efeitos, o de translação e o de rotação. Verifica-se, no entanto, que um sistema de forças nestas condições poderá reduzir-se sempre a um sistema força-binário: para que o efeito de translação seja equivalente, escolhe-se como força a resultante das forças aplicadas sobre o corpo rígido, aplicada no ponto onde se irão calcular os momentos (garante-se assim que o momento da resultante será nulo); e para que a rotação seja também equivalente, escolhe-se um binário cujo momento seja igual ao momento resultante do sistema de forças.

Consideremos então um sistema de forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$ que actuam sobre os pontos $A_1, A_2, \cdots$, distintos, de um corpo rígido, definidos pelos vectores posição $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots$ Podemos então deslocar cada uma das forças para um ponto arbitrário O, desde que seja acrescentado um binário de momento $\vec{M}_{\vec{F}_1,\mathrm{O}} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ em relação a O. Repetindo este procedimento para as restantes forças, obtém-se o sistema ilustrado, constituído de forças que actuam em O e de binários. Note-se que os momentos $\vec{M}_{\vec{F}_i,\mathrm{O}} \perp \vec{F}_i$ mas que $\vec{M}_{\mathrm{O}}^{\vec{R}}$ não é normal a $\vec{R}$.



Como as forças são agora concorrentes, podemos somá-las vectorialmente e substitui-las pela resultante. Analogamente, os momentos podem ser substituídos por um único vector binário, $\vec{M}_{\mathrm{O}}^{\vec{R}}$, o momento resultante.

Qualquer sistema de forças, por mais complexo que seja, pode assim ser **reduzido a um sistema força-binário equivalente**, que actua num dado ponto O, e é definido pelas equações

$$\boxed{\vec{R} = \sum \vec{F}_i \qquad \vec{M}_{\mathrm{O}}^{\vec{R}} = \sum \vec{M}_{\vec{F}_i,\mathrm{O}} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})}$$

Este sistema força-binário equivalente caracteriza completamente o efeito do sistema de forças sobre o corpo rígido.

Sistemas equivalentes

Dois sistemas de forças são equivalentes se puderem ser reduzidos ao mesmo sistema força-binário, ou seja, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ e $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \ldots$ são equivalentes se e somente se a soma das forças e a soma dos momentos das forças, em relação a um dado ponto O, dos dois sistemas forem respectivamente iguais.

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i' \qquad \sum \vec{M}_{\vec{F}_i,\mathrm{O}} = \sum \vec{M}_{\vec{F}_i',\mathrm{O}}$$

Decompondo as forças e os momentos nas suas componentes cartesianas, as condições necessárias e suficientes para a equivalência dos dois sistemas de forças escrevem-se

$$\begin{array}{lll} \sum F_{i,x} = \sum F_{i,x}' & \sum F_{i,y} = \sum F_{i,y}' & \sum F_{i,z} = \sum F_{i,z}' \\ \sum M_{i,x} = \sum M_{i,x}' & \sum M_{i,y} = \sum M_{i,y}' & \sum M_{i,z} = \sum M_{i,z}' \end{array}$$

Estas equações têm um significado físico simples: dois sistemas de forças são equivalentes se tendem a produzir no corpo rígido a mesma translação segundo os eixos *Ox*, *Oy* e *Oz*, respectivamente, e a mesma rotação em relação aos eixos *Ox*, *Oy* e *Oz*, respectivamente.

Em conclusão, dois sistemas de forças aplicados ao mesmo corpo dizem-se equivalentes se tiverem a mesma resultante (equivalência quanto à translação) e o mesmo momento em relação a um ponto O (equivalência quanto à rotação).

Mostra-se que um sistema de forças aplicado a um corpo rígido é sempre redutível: ou a uma única força (se $\vec{R} \perp \vec{M}_{\mathrm{O}}^{\vec{R}}$), ou a um sistema força-binário, ou ainda apenas a um binário (se $\vec{R} = \vec{0}$).

Casos particulares de redução de um sistema de forças

Quando $\vec{R}=\vec{0}$, o sistema força-binário reduz-se ao vector binário, $\vec{M}_{O}^{\vec{R}}$. O sistema de forças dado pode então ser reduzido a um só binário, denominado **binário resultante do sistema**.

Vejamos de seguida as condições nas quais um determinado sistema de forças pode ser reduzido a uma única força ou resultante. São sistemas para os quais a força $\vec{R}$ e o vector $\vec{M}_{O}^{\vec{R}}$ são mutuamente perpendiculares. Embora esta condição não seja geralmente satisfeita pelos sistemas de forças no espaço, será satisfeita em alguns casos particulares, nomeadamente pelos sistemas constituídos por:

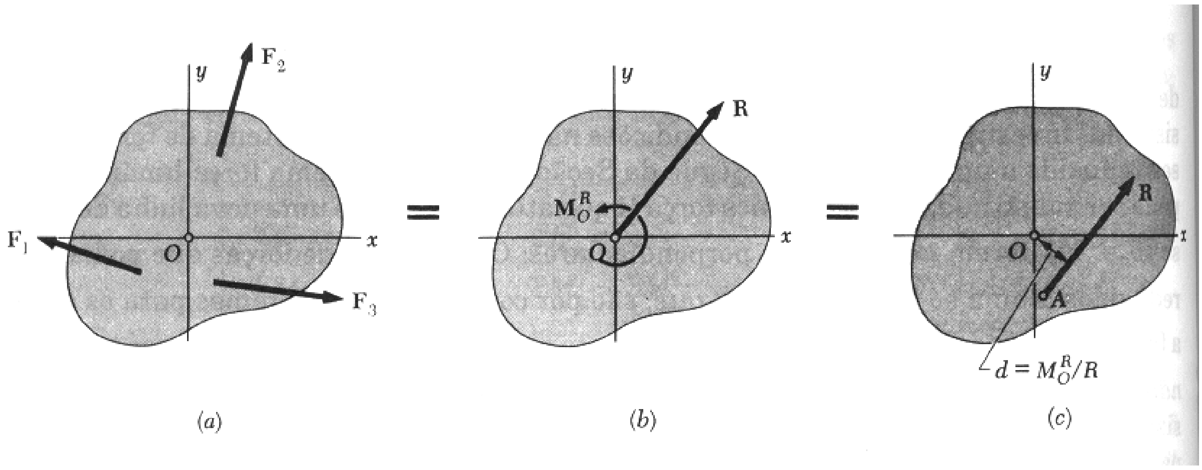
- Forças concorrentes;
- Forças complanares;
- Forças paralelas.

Forças concorrentes

São forças aplicadas num mesmo ponto e podem então ser adicionadas directamente para a obtenção da resultante, $\vec{R}$. As forças concorrentes foram já largamente discutidas.

Forças complanares

A forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ actuam todas no mesmo plano e portanto a resultante das forças do sistema também estará contida no plano definido pelas forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$, enquanto o momento de cada força em relação a O, e portanto o momento resultante, será normal a esse plano. Neste caso, o sistema força-binário em O consiste numa força $\vec{R}$ e num vector binário $\vec{M}_O^{\vec{R}}$ mutuamente perpendiculares.



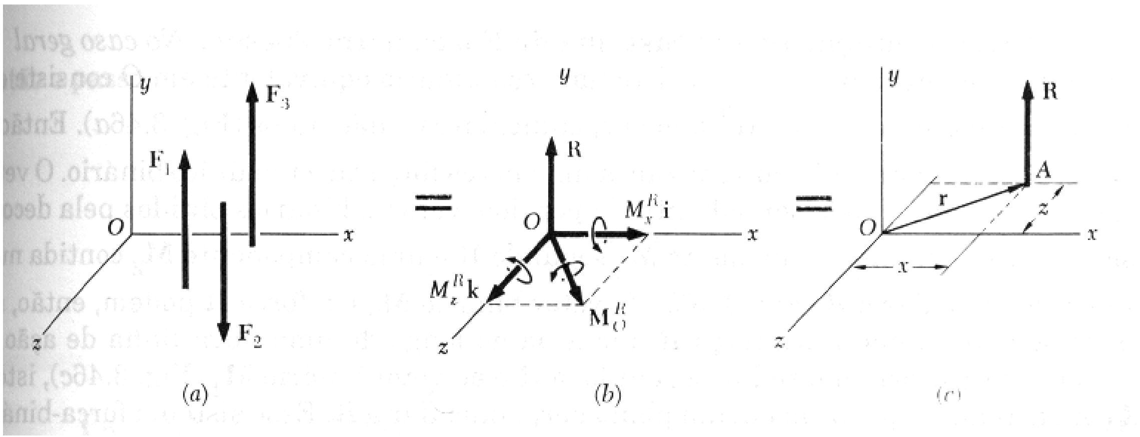
Pode ainda mostrar-se que o sistema força-binário é redutível a uma única força, $\vec{R}$, deslocando-se $\vec{R}$ no plano da figura para um ponto A onde o seu momento em relação a O se torne igual a $\vec{M}_{\mathrm{O}}^{\vec{R}}$. A distância de O à linha de acção de $\vec{R}$ é

$$d = \frac{M_{\mathrm{O}}^{\vec{R}}}{R}$$

Recordando a expressão do momento, escrita em termos das suas componentes cartesianas, tem-se $M_{\mathrm{O}}^{\vec{R}} = xR_y - yR_x$, no caso bidimensional (força no plano *xOy*). Torna-se assim possível determinar as coordenadas *x* e *y* do ponto de aplicação A da resultante.

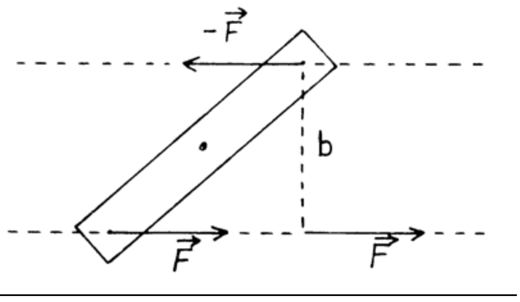
Forças paralelas

Como o nome indica, trata-se agora do estudo do caso em que as forças têm linhas de acção paralelas e podem, ou não, ter o mesmo sentido. Admitindo que as forças são paralelas ao eixo *Oy*, a sua resultante, $\vec{R}$, será obviamente paralela ao eixo *Oy*. Por outro lado, como o momento de cada força é normal a essa força, o momento resultante em relação a O, $\vec{M}_O^R$, estará situado no plano *zOx*. O sistema força-binário em O consiste, portanto, numa força, $\vec{R}$, e num vector binário, $\vec{M}_O^R$, que são mutuamente perpendiculares



Analogamente, eles podem então ser reduzidos a uma única força, $\vec{R}$, pelo deslocamento de $\vec{R}$ para um novo ponto de aplicação A(*x,0,z*) escolhido de modo que o momento de $\vec{R}$ em relação a O seja igual a $\vec{M}_O^R$.

No caso particular de $\vec{R} = \vec{0}$, o sistema de forças será redutível a um único binário de momento $\vec{M}_O^R$.



4.5. Equilíbrio de um sistema de forças. Equilíbrio estático de um corpo rígido

Equilíbrio de um sistema de forças

Dissemos já que um sistema de forças aplicado a um corpo está em equilíbrio se da sua aplicação não resultar nenhuma alteração no estado de repouso ou de movimento do corpo.
Vimos também que se a resultante desse sistema for nula existe equilíbrio do sistema de forças quanto à translacção; e vimos ainda que o momento de um sistema de forças traduz a alteração do movimento de rotação. Se o momento for nulo o sistema de forças estará em equilíbrio quanto à rotação.

Um **sistema de forças aplicado a um corpo está**, portanto, **em equilíbrio estático se tiver resultante nula e momento nulo**.

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum \vec{M}_{\vec{F}_i,\mathrm{O}} = \vec{0}}$$

Equilíbrio estático de um corpo rígido

O estudo do equilíbrio estático de um corpo rígido reduz-se à situação em que as forças externas que actuam sobre o corpo rígido formam um sistema de forças equivalente a zero.

É portanto condição necessária e suficiente para que um corpo rígido esteja em equilíbrio estático num determinado referencial, que se verifiquem, para qualquer ponto O,

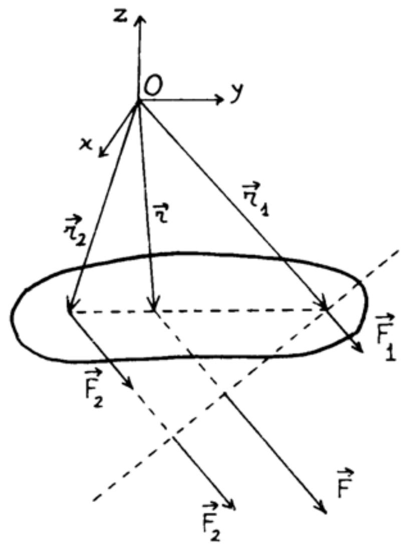
$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum \vec{M}_{\vec{F}_i,\mathrm{O}} = \vec{0}}$$

ou seja, que

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sum F_{i,x} = 0 & \sum F_{i,y} = 0 & \sum F_{i,z} = 0 \\ \sum M_{i,x} = 0 & \sum M_{i,y} = 0 & \sum M_{i,z} = 0 \end{array}}$$

4.6. Centro de forças paralelas. Centro de gravidade

Centro de forças paralelas



Consideremos o sistema constituído unicamente pelas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, paralelas e do mesmo sentido. Este sistema tem resultante não nula, que pode ser reduzida a uma única força, $\vec{F}$. Os momentos $\vec{M}_{\vec{F}_1,O}$ e $\vec{M}_{\vec{F}_2,O}$ são paralelos entre si, e $\vec{M}_{\vec{F},O} = \vec{M}_{\vec{F}_1,O} + \vec{M}_{\vec{F}_2,O}$ é normal à resultante do sistema, neste caso $\vec{F}$.

Pela equivalência de um sistema de forças, sabemos que este sistema é redutível a uma única força, e que tem de ter o mesmo momento em relação a um determinado ponto. Assim, a resultante do sistema de forças terá de estar aplicada num ponto bem determinado, para se garantir a igualdade dos momentos, e assim, a equivalência ao sistema de forças paralelas original. A determinação desse ponto pode ser efectuada pelo método gráfico, ou pelo método analítico.

Vejamos o método analítico: consideremos um ponto O qualquer, que fazemos coincidir com a origem de um sistema de eixos coordenados. O momento do sistema de forças em relação a esse ponto terá de igualar o momento da resultante do sistema de forças em relação ao mesmo ponto O. Representando por $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}$, respectivamente os pontos de aplicação relativamente à origem de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e da resultante $\vec{F}$, tem-se

$$\vec{M}_{\vec{F},O} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad \text{e} \quad \vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{com}\, \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

A condição de equivalência é que $\vec{m} = \vec{M}_{\vec{F},O}$.

Consideremos um vector unitário, $\hat{u}$, paralelo às forças. Cada uma das forças será então escrita sob a forma:

$$\vec{F}_1 = F_1\hat{u} \qquad \vec{F}_2 = F_2\hat{u} \qquad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(F_1 + F_2\right)\hat{u}$$

podendo F_1 e F_2 ser valores positivos ou negativos, consoante os vectores força tenham ou não o mesmo sentido que o vector unitário $\hat{u}$.
O momento do sistema de forças vem estão dado por:

$$\vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}} = \vec{r}_1 \times F_1\hat{u} + \vec{r}_2 \times F_2\hat{u} = F_1\vec{r}_1 \times \hat{u} + F_2\vec{r}_2 \times \hat{u} = \left(F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2\right) \times \hat{u}$$

e o momento da resultante do sistema de forças é dado por

$$\vec{m} = \vec{r} \times \left(F_1 + F_2\right)\hat{u} = \left(F_1 + F_2\right)\vec{r} \times \hat{u}$$

Como $\vec{m} = \vec{M}_{\vec{F},\mathrm{O}}$ e são ambos dados pelo produto vectorial pelo mesmo vector unitário $\hat{u}$, então $\left(F_1 + F_2\right)\vec{r} = F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2$ ou seja $\vec{r} = \dfrac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2}{F_1 + F_2}$.

O vector posição $\vec{r}$ define o ponto onde deve ser aplicada a resultante das forças para que esta seja equivalente ao sistema de forças original.
As componentes *x*, *y* e *z* do vector posição $\vec{r}$, em relação aos três eixos coordenados, obtém-se pelas equações

$$x = \frac{x_1F_1 + x_2F_2}{F_1 + F_2} \qquad y = \frac{y_1F_1 + y_2F_2}{F_1 + F_2} \qquad z = \frac{z_1F_1 + z_2F_2}{F_1 + F_2}$$

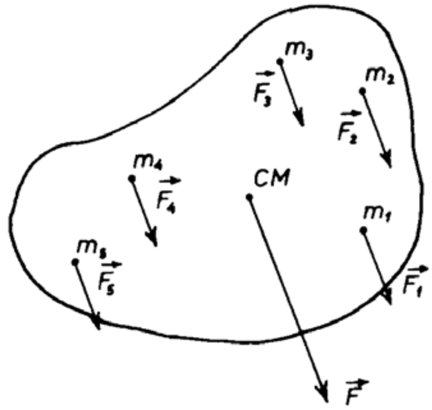
Este resultado pode ser generalizado para qualquer número de forças, independentemente do seu sentido. Assim, se o sistema tiver *n* forças paralelas, o vector posição do ponto de aplicação da resultante desse sistema será dado por $\vec{r} = \dfrac{\sum F_i\vec{r}_i}{\sum F_i}$

O ponto definido pelo vector posição $\vec{r}$ denomina-se **centro de forças paralelas**, e as suas coordenadas são dadas pelas expressões

$$x = \frac{\sum x_iF_i}{\sum F_i} \qquad y = \frac{\sum y_iF_i}{\sum F_i} \qquad z = \frac{\sum z_iF_i}{\sum F_i}$$

Centro de gravidade

Consideremos um corpo ou sistema de pontos materiais constituído por n pontos $P_1, P_2, \ldots$, de massa respectivamente $m_1, m_2, \ldots$. Na presença do campo gravítico, cada partícula é atraída para o centro da Terra com uma força $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$ onde $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade. O peso do corpo será a resultante de todas estas forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$. Atendendo a que a distância das partículas ao centro da Terra é muito grande, pode considerar-se que as forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ constituem um sistema de forças paralelas.

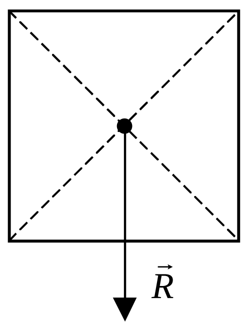


O ponto de aplicação da resultante deste sistema de forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$, paralelas, do mesmo sentido, aplicadas aos vários pontos do sistema e cuja intensidade é $F_i = g m_i$ é dado pela expressão obtida atrás

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

e é conhecido por **centro de gravidade** ou **centro de massa** do corpo ou do sistema.

A posição do centro de massa só depende da distribuição de massas dos vários pontos materiais do sistema. Assim, se se tratar de um sólido homogéneo de forma regular, o centro de massa do sólido coincide com o respectivo centro geométrico.

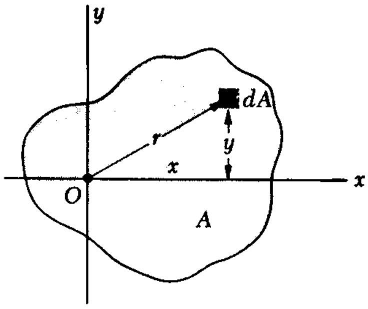


Note-se que o centro de massa de um sistema de pontos materiais pode ser exterior ao sistema – é o caso de qualquer corpo oco homogéneo, por exemplo.

Centro de massa de uma distribuição contínua de massa

Num meio contínuo, e relembrando que a densidade ou massa volúmica de um corpo é definida como sendo a massa desse corpo por unidade de volume, temos que num elemento de volume *dV*, de massa elementar *dm*, ρ = *dm*/ *dV* e a posição do centro de massa será

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{M}\int_V \rho\vec{r}\,dV$$



e as suas coordenadas são dadas pelas expressões

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_V \rho x dV = \frac{1}{M}\int_x\int_y\int_z \rho x dxdydz$$

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_V \rho y dV = \frac{1}{M}\int_x\int_y\int_z \rho y dxdydz$$

$$z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_V \rho z dV = \frac{1}{M}\int_x\int_y\int_z \rho z dxdydz$$

No caso do meio em causa ser homogéneo, ρ é constante e ρ = M/V, logo a posição do centro de massa num meio contínuo e homogéneo é:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,dV$$

Num caso bidimensional, num meio de área total A, esta relação fica

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{A}\int_A \vec{r}\,dA$$

e as coordenadas são

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{A}\int_x\int_y xdxdy$$

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{A}\int_x\int_y ydxdy$$

O vector posição do Centro de Massa (CM) será obviamente

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = x_{\mathrm{CM}}\hat{i} + y_{\mathrm{CM}}\hat{j} \quad (\mathrm{m})$$

A densidade é expressa em $\mathrm{Kg.m^{-3}}$.

Em conclusão: num sistema de N partículas actuam **forças internas** e **forças externas**. As forças internas relacionam-se com a interacção entre as partículas constituintes do sistema e, por este motivo, o seu somatório é o vector nulo, já que estas se anulam aos pares (pares acção-reacção).

$$\vec{F}_R = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{\text{int}}}_{\vec{0}} + \sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}} \equiv \sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}}$$

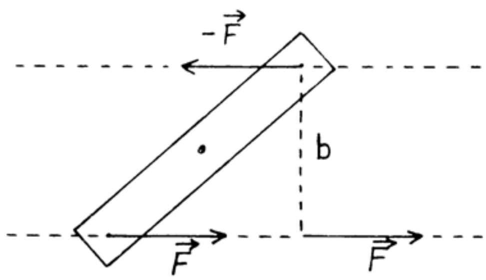
Assim, a força resultante é apenas o somatório das forças externas ao sistema, e é proporcional à aceleração do centro de massa do referido sistema, sendo a massa do sistema a constante de proporcionalidade.

$$\vec{F}_R = \sum_i m_i \vec{a}_i = M\,\vec{a}_{\text{CM}}$$

O movimento do CM é igual ao movimento de uma partícula com a massa total do sistema e onde é aplicada a força resultante. O movimento do CM não é influenciado pelas forças internas ao sistema.

Portanto, o movimento do CM de um corpo rígido é definido por $\vec{F}_R = M\vec{a}_{\text{CM}}$ e o corpo diz-se em equilíbrio de translação quando $\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_R = \vec{0}$

Exemplo da barra homogénea: o CM está fixo, mas a barra não está em equilíbrio!!



Num corpo rígido em equilíbrio:
quanto à translação, o CM ou está em repouso, ou em movimento rectilíneo e uniforme; quanto à rotação, ou o corpo não roda, ou roda com uma velocidade angular constante em torno de um eixo que passa pelo CM.

4.7. Forças distribuídas

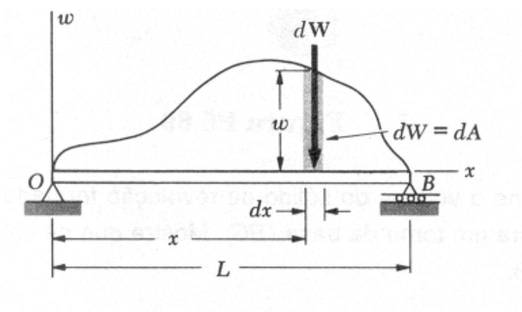
4.7.1. Forças distribuídas sobre vigas

Consideremos o exemplo de uma viga que suporta uma *força distribuída*. Esta força pode ser constituída pelo peso de materiais apoiados directa ou indirectamente sobre a viga, ou pode até ser causada pelo vento.
A *força distribuída* pode representar-se pelo diagrama de uma força ***w*** suportada por unidade de comprimento (N/m). O módulo desta força exercida sobre um elemento de viga *dx* será então *dw=w dx*, pelo que a força total suportada pela viga será

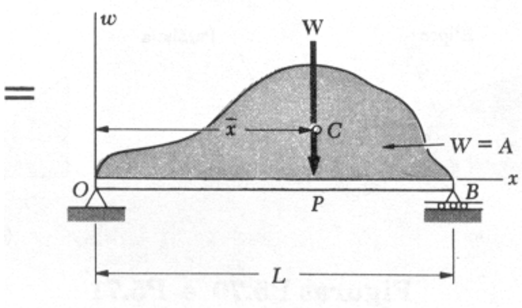
$$W = \int_0^L w dx$$

Mas o produto wdx é igual, em módulo, ao elemento de área dA e W é, por conseguinte, igual à área total A sob a curva de carga:

$$W = \int dA = A$$

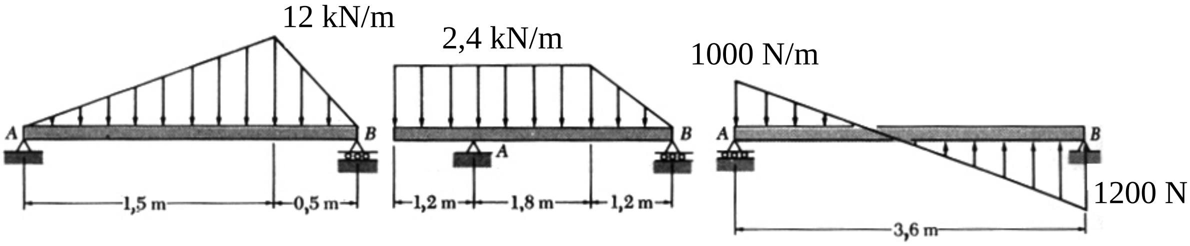


(a)



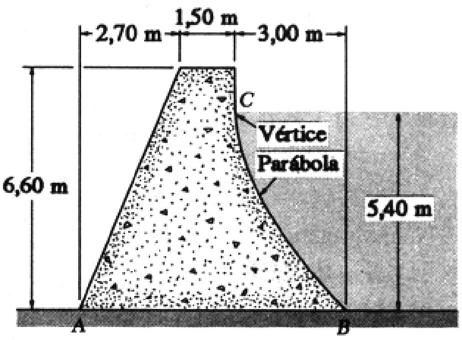
(b)

O ponto de aplicação desta força concentrada equivalente terá uma linha de acção que passa pelo centro de massa daquela área.



4.7.2. Forças sobre superfícies Submersas

Outro exemplo é o estudo das forças exercidas sobre uma superfície submersa num fluído.
A figura mostra a secção transversal de um dique de concreto. Considerar a secção do dique com 1,00 m de espessura e determinar: a) a resultante das forças reactivas exercida pelo solo sobre a base AB do dique e b) a resultante das forças de pressão exercidas pela água sobre a face BC do dique. Peso específico do concreto = $23,54\times10^3\,\mathrm{Nm}^{-3}$; da água = $9,81\times10^3\,\mathrm{Nm}^{-3}$.



a) Reacção do solo: Escolhemos como corpo livre uma secção AEFCBD, de 1,00 m de espessura, do dique e da água, como ilustrado. As forças reactivas exercidas pelo solo sobre a base AB são representadas por um sistema força-binário equivalente em A. Outras forças que actuam sobre o corpo livre são o peso do dique, representado pelo peso de suas componentes W_1, W_2 e W_3, o peso da água W_4 e a resultante P das forças de pressão exercidas sobre a secção BD, pela água situada à sua direita.

Temos

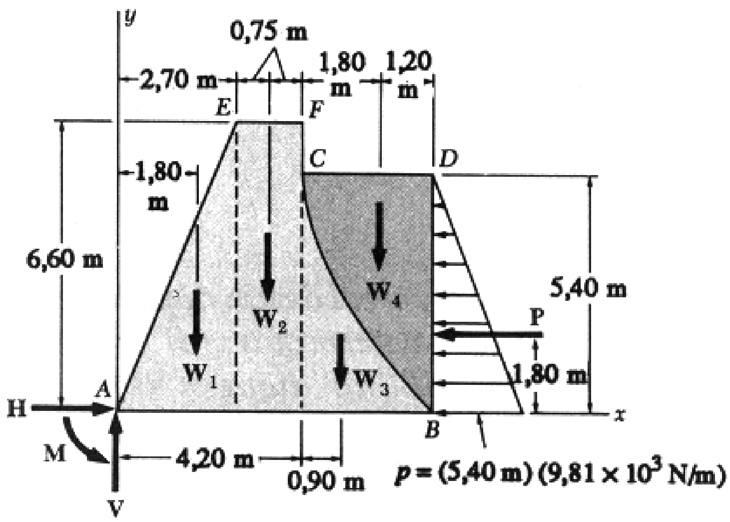
$$W_1 = \tfrac{1}{2}(2,70\text{m})(6,60\text{m})(1,00\text{m})\left(23,54\times10^3\,\text{Nm}^{-3}\right) = 209,74\times10^3\,\text{N}$$

$$W_2 = (1,50\text{m})(6,60\text{m})(1,00\text{m})\left(23,54\times10^3\,\text{Nm}^{-3}\right) = 235,05\times10^3\,\text{N}$$

$$W_3 = \tfrac{1}{3}(3,0\text{m})(5,40\text{m})(1,00\text{m})\left(23,54\times10^3\,\text{Nm}^{-3}\right) = 127,12\times10^3\,\text{N}$$

$$W_4 = \tfrac{2}{3}(3,0\text{m})(5,40\text{m})(1,00\text{m})\left(9,81\times10^3\,\text{Nm}^{-3}\right) = 105,95\times10^3\,\text{N}$$

$$P = \tfrac{1}{2}(5,4\text{m})(1,00\text{m})\left(9,81\times10^3\,\text{Nm}^{-3}\right) = 143,03\times10^3\,\text{N}$$



Equações de equilíbrio

$$\underrightarrow{+}\ \sum F_x = 0: \quad H - 143,03\times10^3\,\text{N} = 0 \quad H = 143,03\times10^3\,\text{N} \rightarrow$$

$$+\uparrow\ \sum F_y = 0:$$

$$V - 209,74\times10^3\,\text{N} - 233,05\times10^3\,\text{N} - 127,12\times10^3\,\text{N} - 105,95\times10^3\,\text{N} = 0$$

$$V = 675,86\times10^3\,\text{N}\ \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0:$$

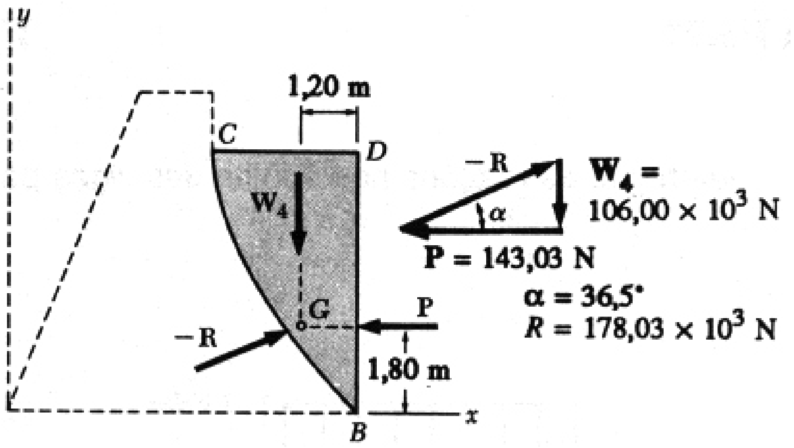
$$-\left(209,74\times10^3\,\text{N}\right)(1,80\text{m}) - \left(233,05\times10^3\,\text{N}\right)(3,45\text{m}) - \left(127,12\times10^3\,\text{N}\right)(5,10\text{m})$$

$$-\left(105,95\times10^3\,\text{N}\right)(6,00\text{m}) + \left(143,03\times10^3\,\text{N}\right)(1,80\text{m}) + M = 0$$

$$M = 2208,11\times10^3\,\text{Nm}\ \circlearrowleft$$

Podemos substituir o sistema força-binário obtido por uma força única que actua à distância d à direita de A, onde

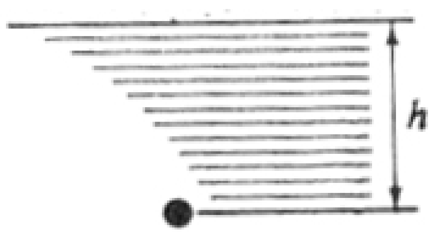
$$d = \frac{2208{,}11 \times 10^3\,\text{Nm}}{675{,}86 \times 10^3\,\text{N}} \qquad d = 3{,}27\text{m}$$



a) Resultante R das forças da água: A secção parabólica da água BCD é escolhida como um corpo livre. As forças envolvidas são: a resultante, $-R$, das forças exercidas pelo dique sobre a água, o peso W_4 e a força P. Como essas forças devem ser concorrentes, $-R$ passa pelo ponto de intersecção G de W_4 e P. Desenha-se um triângulo de forças, do qual é determinado o módulo e a direcção de $-R$. A resultante R das forças exercidas pela água sobre a face BC é igual e oposta:

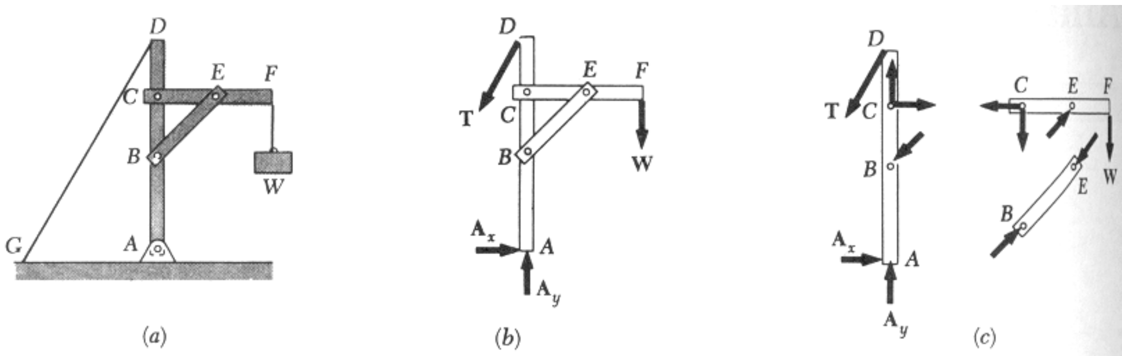
$$R = 178{,}03 \times 10^3\,\text{N} \swarrow 36{,}5^\circ$$

Nota: Pressão manométrica num ponto de um líquido é a diferença entre a pressão no ponto e a pressão na superfície. Na superfície age a pressão atmosférica, que não é considerada. A pressão absoluta no ponto do líquido será a soma da pressão manométrica com a pressão atmosférica: $P_{\text{man}} = \gamma h$; $P_{\text{abs}} = \gamma h + P_{\text{at}}$.



4.8. Análise de Estruturas

Os exemplos estudados diziam respeito ao equilíbrio de um único corpo rígido, e todas as **forças** consideradas eram **externas** ao próprio corpo rígido. Consideraremos de seguida problemas envolvendo o equilíbrio de estruturas compostas de várias partes interligadas, pelo que será necessário determinar não apenas as forças externas aplicadas sobre a estrutura, mas também as forças que mantém unidas as várias partes da estrutura. Do ponto de vista da estrutura como um todo, estas forças são **forças internas**.



As forças representadas na fig (c) estão de acordo com a 3ª Lei de Newton, que estabelece que as forças de acção e reacção entre corpos em contacto possuem o mesmo módulo, a mesma linha de acção e sentidos opostos.

As principais categorias de estruturas utilizadas, treliças e estruturas, são projectadas para suportar cargas, e usualmente são estruturas estacionárias, totalmente vinculadas.

- Treliças – formadas unicamente por elementos rectilíneos conectados em juntas ou nós localizadas nas extremidades de cada elemento. Assim, nos membros de uma treliça actuam duas forças de mesmo módulo e direcção porém de sentidos opostos.

- Estruturas – têm pelo menos um elemento no qual estão aplicadas três ou mais forças que, em geral, não têm a direcção do elemento (*eg.* figura anterior).

Métodos para análise de treliças:

- dos nós
- das secções

Numa treliça simples o número total de barras é $b=2n-3$, onde n é o número total de nós. O número de incógnitas será então $2n=b+3$

Quando se pretende determinar as forças exercidas em todas as barras de uma treliça, o método dos nós é o mais eficaz. Se o objectivo for a determinação da força exercida em uma ou apenas em algumas das barras da treliça, o método das secções será mais eficiente.